

## a nové pojetí Bayesova pravidla

Inspirováno lekcí 3Blue1Brown: *The medical test paradox,  
and redesigning Bayes' rule*

GaussAlgo · 2026

## 1. Úvod: Proč je medicínský test „paradoxní“?

Představ si test na závažnou nemoc, který je podle letáku **99 % přesný**. A přesto, když ti vyjde pozitivní výsledek, skutečná šance, že nemoc máš, může být jen okolo **10-15 %**, nebo i méně. Na první pohled to působí jako paradox – jak může být test dobrý a zároveň tak často „klamat“?

*Odpověď leží v záměně dvou odlišných pojmů: přesnost testu samotného (senzitivita a specifická) vs. pravděpodobnost nemoci u konkrétního pacienta po obdržení výsledku (PPV). Bez znalosti prevalence nemoci v populaci není možné správně interpretovat výsledek testu.*

Tento dokument vysvětluje:

- klasickou podobu Bayesova pravidla v kontextu medicínských testů,
- intuitivní frekvenční pohled (model 1 000 pacientů),
- přeformulování Bayesova pravidla v pojmech **odds** (kurzů) a **Bayesova faktoru** (likelihood ratio),
- proč je tato nová forma praktičtější pro klinickou praxi i lidskou intuici.

## 2. Základní pojmy v diagnostice

Před samotným výpočtem potřebujeme přesně vymezit pojmy, se kterými budeme pracovat. Vše se vztahuje k nemoci a testu, který se ji snaží odhalit.

<b>Prevalence</b>	Podíl populace, která má danou nemoc. Například 1 % znamená, že v průměru 1 člověk ze 100 ji má.
<b>Senzitivita (citlivost)</b>	Pravděpodobnost, že test vyjde pozitivně, pokud pacient nemoc skutečně má. Jinak řečeno: kolik nemocných test zachytí?
<b>Specifická</b>	Pravděpodobnost, že test vyjde negativně, pokud pacient nemoc nemá. Tedy: kolik zdravých test správně označí jako zdravé?
<b>False Positive Rate (FPR)</b>	Pravděpodobnost falešně pozitivního výsledku u zdravého člověka. Platí: $FPR = 1 - \text{specifická}$ .
<b>False Negative Rate (FNR)</b>	Pravděpodobnost falešně negativního výsledku u nemocného. Platí: $FNR = 1 - \text{senzitivita}$ .

<b>Pozitivní prediktivní hodnota (PPV)</b>	Pravděpodobnost, že pacient nemoc skutečně má, když test vyšel <b>pozitivně</b> . To je otázka, kterou si pokládá většina pacientů.
<b>Negativní prediktivní hodnota (NPV)</b>	Pravděpodobnost, že pacient je zdravý, když test vyšel <b>negativně</b> .

### 3. Frekvenční příklad: 1 000 pacientů

Nejjednodušší způsob, jak pochopit Bayesovo pravidlo, je pracovat s konkrétními počty místo abstraktních pravděpodobností. Představme si **1 000 lidí**, kteří podstoupí test.

Parametr	Hodnota	Výsledek
Prevalence	1 %	10 nemocných, 990 zdravých
Senzitivita	99 %	z 10 nemocných: 9 pozitivních, 1 negativní
Specifická	95 %	z 990 zdravých: 941 negativních, 49 pozitivních

Z těchto čísel snadno spočítáme **pozitivní prediktivní hodnotu (PPV)**:

$$PPV = \frac{TP}{TP + FP} = \frac{9}{9 + 49} = \frac{9}{58} \approx 15.5\%$$

*TP = true positives (9), FP = false positives (49)*

*Toto je jádro paradoxu: test s vynikajícími parametry (senzitivita 99 %, specifická 95 %) dává pozitivní výsledek, který u vzácné nemoci (prevalence 1 %) znamená jen 15% šanci skutečného onemocnění. Většina „pozitivních“ pacientů je zdravých – jednoduše proto, že zdravých je v populaci mnohem více.*

### 4. Klasická forma Bayesova pravidla

V klasické podobě Bayesova věta říká, jak aktualizovat pravděpodobnost hypotézy po obdržení nového důkazu:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

V kontextu medicínského testu:

- **A** = pacient má nemoc
- **B** = test vyšel pozitivně

$$P(\text{nemoc} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{nemoc}) \cdot P(\text{nemoc})}{P(+)}$$

Kde jmenovatel  $P(+)$  je celková pravděpodobnost pozitivního výsledku – tedy součet případů, kdy je pozitivní u nemocného, i kdy je pozitivní u zdravého:

$$P(+)=P(+ \mid \text{nemoc}) \cdot P(\text{nemoc})+P(+ \mid \text{zdravý}) \cdot P(\text{zdravý})$$

*Frekvenční příklad s 1 000 pacienty je přímou vizualizací tohoto vzorce: místo pravděpodobností pracujeme s absolutními počty, které jsou pro lidský úsudek přirozenější. Výsledek je ale totožný.*

## 5. Intuitivní problém klasické formy

Přestože je klasická formulace matematicky korektní a elegantní, v praxi naráží na výrazné obtíže:

<b>Záměna podmíněných pravděpodobností</b>	Lékaři i pacienti často zaměňují $P(\text{nemoc} \mid +)$ s $P(+ \mid \text{nemoc})$ . Jde o tzv. transpozici podmíněné pravděpodobnosti.
<b>Skrytá normalizace</b>	$P(+)$ v jmenovateli je mix nemocných a zdravých – v hlavě se špatně konstruuje bez explicitního výpočtu.
<b>Přecenění pozitivního výsledku</b>	Při nízké prevalenci lidé systematicky odhadují PPV mnohem výše, než skutečně je.

## 6. Odds (kurzy) místo pravděpodobností

3Blue1Brown navrhuje elegantní přeformulování Bayesova pravidla, které pracuje s **odds** (kurzy) místo přímo s pravděpodobnostmi. Odds jsou způsob vyjádření nejistoty, který se v sázkařství nebo v klinické medicíně přirozeně uplatňuje.

### Co jsou odds?

Pokud je pravděpodobnost události  $p$ , pak odds ve prospěch této události jsou:

$$\text{odds} = \frac{p}{1-p}$$

Pravděpodobnost	Odds	Interpretace
1 %	1 : 99	1 nemocný na 99 zdravých
10 %	1 : 9	1 nemocný na 9 zdravých
50 %	1 : 1	Fifty-fifty
80 %	4 : 1	4 nemocní na 1 zdravého

Zpět z odds na pravděpodobnost:

$$p = \frac{\text{odds}}{1 + \text{odds}}$$

## 7. Bayesův faktor / Likelihood Ratio

Klíčovým pojmem v redesignu Bayesova pravidla je **Bayesův faktor** (v medicíně znám jako **likelihood ratio**). Říká nám, kolikrát je daný výsledek testu pravděpodobnější u nemocného než u zdravého člověka.

### Likelihood Ratio pro pozitivní test (LR+)

$$\text{LR+} = \frac{P(+ | nemoc)}{P(+ | zdravý)} = \frac{\text{senzitivita}}{\text{FPR}} = \frac{\text{senzitivita}}{1 - \text{specifická}}$$

### Likelihood Ratio pro negativní test (LR-)

$$\text{LR-} = \frac{P(- | nemoc)}{P(- | zdravý)} = \frac{\text{FNR}}{\text{specifická}} = \frac{1 - \text{senzitivita}}{\text{specifická}}$$

**Příklad s čísly:** Senzitivita = 99 %, specifická = 95 %

$$\text{LR+} = \frac{0,99}{0,05} \approx 19,8$$

$LR+ \approx 20$  znamená: pozitivní výsledek testu je zhruba 20× pravděpodobnější u nemocného pacienta než u zdravého. Čím vyšší  $LR+$ , tím silnější je důkaz ve prospěch nemoci. Čím nižší  $LR-$  (pod 1), tím silněji negativní test nemoc vylučuje.

## 8. Bayesovo pravidlo v odds formě

Teď přichází hlavní myšlenka redesignu. Místo práce s pravděpodobnostmi kombinujeme **odds** a **Bayesův faktor** prostým násobením:

$$\text{posterior odds} = \text{prior odds} \times \text{Bayes factor}$$

*Bayesovo pravidlo v odds formě*

### Příklad s čísly - prevalence 1 %

#### 1. Prior odds (prevalence 1 %)

$$\text{prior odds} = \frac{0,01}{0,99} \approx 0,0101$$

#### 2. Aplikace $LR+ \approx 20$

$$\text{posterior odds} = 0,0101 \times 20 \approx 0,202$$

#### 3. Převod zpět na pravděpodobnost

$$p_{\text{post}} = \frac{0,202}{1+0,202} \approx 16,8\%$$

Výsledek (~17 %) odpovídá frekvenčnímu modelu s 1 000 pacienty (15,5 %). Nepatrný rozdíl je způsoben zaokrouhlením. Všimněte si elegance: nepotřebujeme počítat složené pravděpodobnosti – stačí jedno násobení.

## 9. Více testů za sebou

Jedna z nejhezčích vlastností odds formy je, jak přirozeně se rozšiřuje na **kombinaci více nezávislých testů**. Pokud má každý test Bayesův faktor  $BF_1, BF_2, \dots, BF_n$ , pak:

$$\text{posterior odds} = \text{prior odds} \times BF_1 \times BF_2 \times \dots \times BF_n$$

V logaritmickém měřítku se násobení mění na sčítání, což je základ tzv. **log-odds** reprezentace (využívané mj. v logistické regresi).

V klinické praxi to umožňuje:

- Začít s **předtestovou pravděpodobností** danou demografií a anamnézou pacienta.
- Každý výsledek (krevní marker, zobrazení, EKG) aplikovat jako další násobitel.
- Průběžně sledovat, jak se odds posouvají – a kdy jsou dostatečně přesvědčivé pro klinické rozhodnutí.

## 10. Negativní výsledky a LR–

Stejný princip platí i pro negativní test s LR–. Pokud je LR– výrazně menší než 1, negativní výsledek silně snižuje odds na nemoc.

**Příklad:** Prior pravděpodobnost 50 % (odds = 1), LR– = 0,1

$$\text{posterior odds} = 1 \times 0,1 = 0,1 \Rightarrow p = \frac{0,1}{1,1} \approx 9\%$$

*Negativní test tak srazil riziko z 50 % na pouhých 9 %. Test s nízkým LR– je velmi dobrý v vylučování nemoci – zatímco test s vysokým LR+ je dobrý v jejím potvrzování.*

## 11. Přínosy odds formy a praktické shrnutí

<b>Intuitivita</b>	Odds × faktor = nové odds. Žádná normalizace, žádné skryté součty.
<b>Komunikovatelnost</b>	LR+ nebo LR– je jedno číslo popisující sílu testu – snadno sdělitelné i zapamatovatelné.
<b>Kompozice</b>	Více testů = více násobení. V logaritmickém měřítku jen sčítáme.
<b>Flexibilita</b>	Prior odds může zohledňovat věk, pohlaví, rizikové faktory – nejen prevalenci.

## Jak si to pamatovat - 4 kroky

---

1	Zjistí prevalenci / předtestovou pravděpodobnost → převed' na odds
2	Najdi LR+ nebo LR– testu
3	Posterior odds = prior odds × LR
4	Převed' zpět: $p = \text{odds} / (1 + \text{odds})$

## 12. Doporučené zdroje

---

- 3Blue1Brown – *The medical test paradox: Can redesigning Bayes' rule help?* (video + interaktivní lekce na [3blue1brown.com](https://3blue1brown.com))
- 3Blue1Brown – *Bayes' theorem* (vizuální lekce ke klasickému Bayesovi)
- Wikipedia – *Bayes' theorem*
- Wikipedia – *Likelihood ratios in diagnostic testing*
- LessWrong / Arbital – *Bayes' rule: Odds form*
- J. Attia – *Using likelihood ratios to help interpret diagnostic tests*

---

*Poznámka: Obrázky z lekce 3Blue1Brown jsou chráněny autorskými právy. Tento dokument s nimi počítá jako s externími zdroji, které si uživatel ručně stáhne z oficiální stránky [3blue1brown.com/lessons/better-bayes](https://3blue1brown.com/lessons/better-bayes).*